

الأدهم
فى
الجبـــــــر
اسم الطالب /
المدرســـة /
الفصـــــل /
الصف الثانى الثانوى
الفصل الدراسى الثانى
إعداد
أ/ محمد أدهم
ت / ٠١٠٠٧٤٥١٩٥٧

الدرس الأول
المتتابعات

شوية ملاحظات زي الفل

١- المتتابعة هي دالة مجالها ($ص^+$) مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة أو مجموعة جزئية منها ومجالها المقابل ح

د: $ص^+ \longrightarrow ح$

٢- $ح_ن$ ← يرمز للحد النوني [الحد العام]

($ح_ن$) ← يرمز للمتتابعة

٣- حدود المتتابعة هي صور عناصر مجال المتتابعة

٤- المتتابعة المنتهية

يمكن حصر أو عد عناصرها

(١، ٢، ٣، ٤، ..... ، ٢٠)

٥- المتتابعة غير المنتهية

لا يمكن عد عناصرها

(١، ٢، ٣، ٤، ......)

٦- المتتابعة التزايدية

$ح_{ن+١} > ح_ن$

أو $ح_{ن+١} - ح_ن > صفر$

أي أن كل حد أكبر من الحد السابق له مباشرة

٧- المتتابعة التناقصية

$ح_{ن+١} < ح_ن$

$ح_{ن+١} - ح_ن < صفر$

أي أن كل حد أصغر من السابق له مباشرة

٨- المتتابعة التذبذبية

تختلف فيها إشارة كل حد عند الحد التالي له مباشرة

مثل ($\frac{-١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{-١}{٦}$ ، $\frac{١}{٨}$ ، $\frac{-١}{١٠}$)

ويكون $ح_ن = (-١)^ن \times$ ---

٩- المتتابعة الثابتة

جميع حدودها متساوية

يعني الحد العام $ح_ن = م$ ← ثابت

مثل (٥، ٥، ٥، ٥، ......)

١٠- متتابعة الأعداد الزوجية

(٢، ٤، ٦، ٨، ......) ← $ح_ن = ٢ن$

١١- متتابعة الأعداد الفردية

(١، ٣، ٥، ٧، ......) ← $ح_ن = ٢ن - ١$

مثال ١ اكتب الحد العام لكل من المتتابعات التالية

① (٢، ٤، ٦، ٨، ...)

دى متتابعة الأعداد الزوجية

حدها العام $\text{ح}_{\text{ن}} = 2\text{ن}$

② $\left(\frac{1}{2}، \frac{1}{4}، \frac{1}{8}، \frac{1}{16}، ...\right)$

الحل

$\text{ح}_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^1$ ، $\text{ح}_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\text{ح}_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3$ ، $\text{ح}_4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4$

$\text{ح}_{\text{ن}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\text{ن}}$

③ $\left(\frac{-1}{3}، \frac{1}{4}، \frac{-1}{5}، \frac{1}{6}، ...\right)$

الحل

$\text{ح}_1 = \frac{(-1)^1}{2+1}$ ، $\text{ح}_2 = \frac{(-1)^2}{2+2}$

$\text{ح}_3 = \frac{(-1)^3}{2+3}$ ، $\text{ح}_4 = \frac{(-1)^4}{2+4}$

$\therefore \text{ح}_{\text{ن}} = \frac{(-1)^{\text{ن}}}{\text{ن}+2}$

④ (١، ٤، ٩، ١٦، ...)

الحل

$\text{ح}_1 = 1^2$ ، $\text{ح}_2 = 2^2$

$\text{ح}_3 = 3^2$ ، $\text{ح}_4 = 4^2$

$\text{ح}_{\text{ن}} = \text{ن}^2$

⑤ (١، ٨، ٢٧، ٦٤، ...)

⑥ (-١، ٤، -٩، ١٦، ...)

$\text{ح}_1 = (-1)^1 \times 1^2$ ، $\text{ح}_2 = (-1)^2 \times 2^2$

$\text{ح}_3 = (-1)^3 \times 3^2$ ، $\text{ح}_4 = (-1)^4 \times 4^2$

$\text{ح}_{\text{ن}} = (-1)^{\text{ن}} \times \text{ن}^2$

⑦ اكتب الحدود الستة الأولى من المتتابعة ($\text{ح}_{\text{ن}}$) حيث

$\text{ح}_{\text{ن}+2} = \text{ح}_{\text{ن}+1} + \text{ح}_{\text{ن}}$ ، $\text{ن} \geq 1$

، $\text{ح}_1 = 2$ ، $\text{ح}_2 = 3$

الحل

$\text{ح}_1 = 2$ ، $\text{ح}_2 = 3$ ، $\text{ح}_3 = 2 + 3 = 5$

$\text{ح}_4 = \text{ح}_3 + \text{ح}_2 = 3 + 5 = 8$

$\text{ح}_5 = \text{ح}_4 + \text{ح}_3 = 5 + 8 = 13$

$\text{ح}_6 = \text{ح}_5 + \text{ح}_4 = 8 + 13 = 21$

∴ المتتابعة (٢، ٣، ٥، ٨، ١٣، ٢١)

مثال ٢ أوجد الحد العام للمتتابعة (٩، ١٣، ١٧، ٢١، ...) ثم أوجد

① ح_{10} ، ح_{17} فى المتتابعة

② رتبة الحد الذى قيمته ٦٥

الحل

لما تبص للمتتابعه هتلاحظ أن كل حد بيزيد عن سابقه بمقدار ٤

$ح_{١} = ٩ + ٤(٠)$ ، $ح_{٢} = ٩ + (٤ \times ١)$

$ح_{٣} = ٩ + (٤ \times ٢)$ ، $ح_{٤} = ٩ + (٤ \times ٣)$

∴ الحد العام $ح_{ن} = ٩ + ٤(ن - ١)$

المطلوب

① $ح_{١٠} = ٩ + ٤(١٠ - ١)$

$= ٩ + ٤ \times ٩ = ٤٥$

② $ح_{١٧} = ٩ + ٤ \times (١٧ - ١)$

$= ٩ + ٤ \times ١٦ = ٧٣$

ثانياً لإيجاد رتبة الحد الذي قيمته = ٦٥ هنساوي الحد العام = ٦٥

$٩ + ٤(ن - ١) = ٦٥$

$٤(ن - ١) = ٦٥ - ٩$

$٤ن - ٤ = ٦٥ - ٩$ ، $+٤$

$٤ن = ٦٠$

$ن = \frac{٦٠}{٤} = ١٥$ ← الحد الخامس عشر

مثال ٣

أوجد الحد العام للمتتابعه (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ...) ثم أوجد

① $ح_{٦}$ ، $ح_{١١}$

② رتبة الحد الذي قيمته ٣٨٤

الحل

مثال ٤

في المتتابعه $(ح_{ن})$ إذا كان $ح_{١} = ٩$ ، $ح_{٣} = ٣٦$ ، $ح_{ن+١} = ح_{ن} + ن س$ فأوجد قيمة س

الحل

بوضع ن = ١

$ح_{٢} = ح_{١} + س = ٩ + س$ ← ①

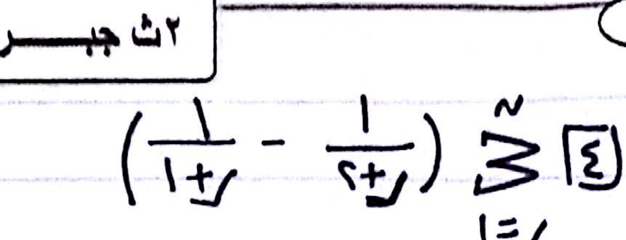
بوضع ن = ٢ $ح_{٣} = ح_{٢} + ٢س$ ← ②

بالتعويض من ① في ②

$ح_{٢} = ٩ + س$ ، $ح_{٣} = ٩ + س + ٢س$

∴ $٩ + ٣س = ٣٦$

$٣س = ٢٧$ ، $س = \frac{٢٧}{٣} = ٩$





مثال ١: أكتب كلاً من المتسلسلات الآتية في شكل المفكوك ثم أوجد مجموعها

[1] $\sum_{ر=1}^{5} ر$

بوضع ر = ١، ٢، ٣، ٤، ٥

$\sum_{ر=1}^{5} ر = 1+2+3+4+5 = 15$

[2] $\sum_{ر=1}^{5} (1+ر^2)$

$= (1+1^2) + (1+2^2) + (1+3^2) + (1+4^2) + (1+5^2)$

$= 2 + 5 + 10 + 17 + 26 = 60$

[3] $\sum_{ر=1}^{9} (3ر+2)$

$= (3\times1+2) + (3\times2+2) + (3\times3+2) + (3\times4+2) + (3\times5+2) + (3\times6+2) + (3\times7+2) + (3\times8+2) + (3\times9+2)$

$= 5+8+11+14+17+20+23+26+29$

$= 153$

[4] $\sum_{ر=1}^{ن} \left(\frac{1}{ر+2} - \frac{1}{ر+1}\right)$

$= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{ن+2} - \frac{1}{ن+1}\right)$

$= \frac{1}{ن+2} - \frac{1}{2} = \frac{2-(ن+2)}{2(ن+2)}$

$= \frac{2-ن-2}{2(ن+2)} = \frac{-ن}{2(ن+2)}$

المتسلسلة غير المنتهية

لا يمكن حصر حدودها

$\sum_{ر=1}^{\infty} \square$

مثال ٢: إستخدم رمز التجميع في كتابة المتسلسلة

$1\times2\times3 + 3\times4\times5 + 5\times6\times7 + \dots$

الحل

الأول نجيب الحد العام للمتتابعة

$ح_ر = (2ر-1)\ 2ر\ (2ر+1)$

$\therefore 1\times2\times3 + 3\times4\times5 + 5\times6\times7 + \dots$

$= \sum_{ر=1}^{\infty} (2ر-1)\ 2ر\ (2ر+1)$

الخواص الجبرية للتجميع

١ $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{جـ} = \text{جـ ن}$

مثلاً $\sum_{\text{ر}=1}^{5} 3 = 3 \times 5 = 15$

$\sum_{\text{ر}=1}^{10} 7 = 7 \times 10 = 70$

٢ $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{أ ع}_{\text{ر}} = \text{أ} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ع}_{\text{ر}}$

إخراج الثابت خارج رمز التجميع

مثلاً $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} 3\,\text{ر}^2 = 3 \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ر}^2$

٣ $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} (\text{ع}_{\text{ر}} \pm \text{هـ}_{\text{ر}}) = \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ع}_{\text{ر}} \pm \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{هـ}_{\text{ر}}$

توزيع التجميع على الجمع أو الطرح

مثلاً $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} (3 + 2\text{ر} - \text{ر}^2)$

$= \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} 3 + 2 \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ر} - \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ر}^2$

٤ $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ر} = \frac{\text{ن}(\text{ن}+1)}{2}$

مجموع الأعداد الصحيحة الموجبة من ١ ← ن

مثلاً $\sum_{\text{ر}=1}^{10} \text{ر} = \frac{10(10+1)}{2} = 55$

٥ $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ر}^2 = \frac{\text{ن}(\text{ن}+1)(2\text{ن}+1)}{6}$

مجموع مربعات الأعداد الصحيحة الموجبة من ١ ← ن

مثلاً $\sum_{\text{ر}=1}^{8} \text{ر}^2 = \frac{8(8+1)(2\times 8+1)}{6} = 204$

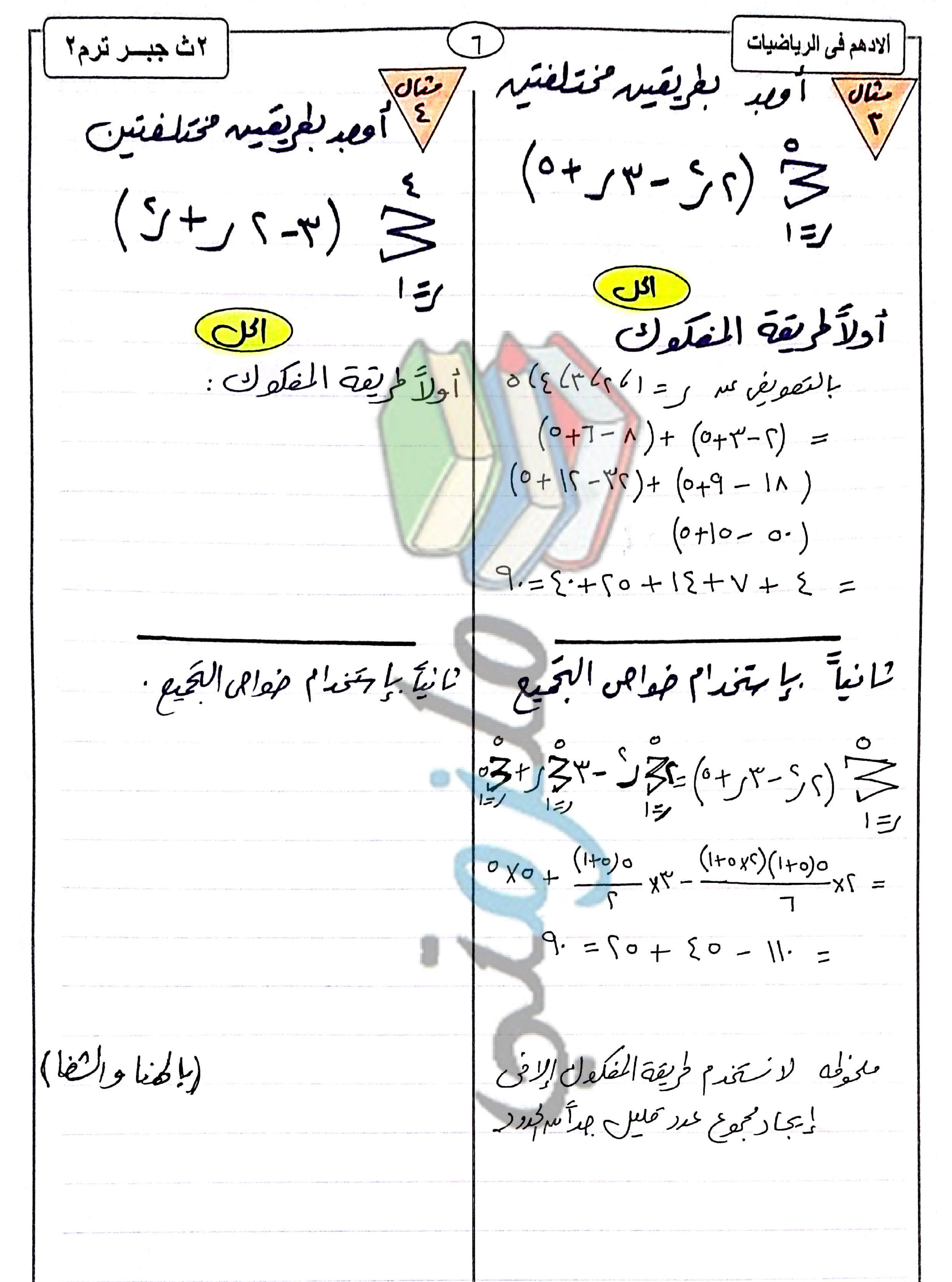
لاحظ جيداً أننا في كل الخواص نبدأ من ر = ١

طيب لو مش بيبدأ من (١)

حاول تخليها على شكل متسلسلتين طرحهم من بعض ويبدأوا من الواحد

مثلاً $\sum_{\text{ر}=7}^{20} \text{ر} = \sum_{\text{ر}=1}^{20} \text{ر} - \sum_{\text{ر}=1}^{6} \text{ر}$

في الحصة هنشرح إزاي نستخدم الآلة في حساب التجميع



مثال ٣

أوجد بطريقتين مختلفتين

$$\sum_{ر=١}^{٥} (٢ر^{٢} - ٣ر + ٥)$$

الحل

أولاً طريقة المفكوك

بالتعويض عن ر = ١، ٢، ٣، ٤، ٥

$= (٢ - ٣ + ٥) + (٨ - ٦ + ٥)$

$+ (١٨ - ٩ + ٥) + (٣٢ - ١٢ + ٥)$

$+ (٥٠ - ١٥ + ٥)$

$= ٤ + ٧ + ١٤ + ٢٥ + ٤٠ = ٩٠$

ثانياً باستخدام خواص التجميع

$$\sum_{ر=١}^{٥} (٢ر^{٢} - ٣ر + ٥) = ٢\sum_{ر=١}^{٥} ر^{٢} - ٣\sum_{ر=١}^{٥} ر + \sum_{ر=١}^{٥} ٥$$

$$= ٢ \times \frac{٥(٥+١)(٢\times٥+١)}{٦} - ٣ \times \frac{٥(٥+١)}{٢} + ٥ \times ٥$$

$= ١١٠ - ٤٥ + ٢٥ = ٩٠$

ملحوظة لا نستخدم طريقة المفكوك إلا في إيجاد مجموع عدد قليل جداً من الحدود.

مثال ٤

أوجد بطريقتين مختلفتين

$$\sum_{ر=١}^{٤} (٣ - ٢ر + ر^{٢})$$

الحل

أولاً طريقة المفكوك :

ثانياً باستخدام خواص التجميع .

(بالهنا والشفا)

الدرس الثالث
المتتابعة الحسابية

هي المتتابعة التي يكون فيها الفرق بين كل حد والحد السابق له مباشرة مقدار ثابت يسمى أساس المتتابعة (د)

د = أي حد - السابق له

مثال ١ أي من المتتابعات الآتية حسابية وأوجد الأساس إذا كانت حسابية

[١] (٣٨ ، ٤٠ ، ٤٢ ، ٤٤ ، ...)

حسابية وأساسها ٤٠ - ٣٨ = ٢

[٢] (-١٤ ، -١٥ ، -١٦ ، -١٧ ، ...)

حسابية وأساسها -١٥ - (-١٤) = -١

[٣] (٢٥ ، ٣٠ ، ٣٥ ، ٣٦ ، ...)

ليست حسابية عارف ليه ؟

[٤] $(ح_{ن}) = (٥ - ٣ن)$

الحل

$ح_{١} = ٥ - ٣ = ٢$ ، $ح_{٢} = ٥ - ٣ \times ٢ = -١$

$ح_{٣} = ٥ - ٣ \times ٣ = -٤$ ، $ح_{٤} = ٥ - ٣ \times ٤ = -٧$

$(ح_{ن}) = (٢ ، -١ ، -٤ ، -٧ ، ...)$

$-١ - ٢ = -٣ = -٤ - (-١) = -٧ - (-٤) = -٣$

∴ المتتابعة حسابية وأساسها (-٣)

[٥] $(ح_{ن}) = ((ن^{٢} + ١)^{٢})$

الحل

$ح_{١} = (١ + ١)^{٢} = ٤$ ، $ح_{٢} = (٤ + ١)^{٢} = ٢٥$

$ح_{٣} = (١٠)^{٢} = ١٠٠$ ، $ح_{٤} = (١٧)^{٢} =$

$(ح_{ن}) = (٤ ، ٢٥ ، ١٠٠ ، ...)$

∴ المتتابعة ليست حسابية

مثال ٢ في المتتابعة $(ح_{ن})$ حيث $ح_{ن} = ٣ن - ٥$

أ- اثبت أن $(ح_{ن})$ حسابية وأوجد أساسها

ب- بين أن المتتابعة تزايدية؟

جـ- أوجد $ح_{١٥}$

د- أوجد رتبة الحد الذي قيمته = ٨٥

الحل

أ- $ح_{ن} = ٣ن - ٥$

$ح_{ن+١} = ٣(ن + ١) - ٥ = ٣ن - ٢$

∴ $ح_{ن+١} - ح_{ن} = ٣ن - ٢ - ٣ن + ٥ = ٣$ مقدار ثابت

∴ المتتابعة حسابية

ب) ∵ $د = ٣$ الاساس موجب

∴ المتتابعه تزايديه

جـ) $ح_{١٥} = ٣ × ١٥ - ٥ = ٤٠$

د) $٣ن - ٥ = ٨٥$

$٣ن = ٨٥ + ٥ = ٩٠$

$٣ن = ٩٠$ $ن = \frac{٩٠}{٣} = ٣٠$

الصورة العامة للمتتابعة الحسابيه

$ح_ن = (أ ، أ + د ، أ + ٢د ، أ + ٣د ، ...)$

الحد العام (الحد النونى)

$ح_ن = أ + (ن - ١) د$

أ ← الحد الاول د ← الاساس

الحد الاخير $ل = أ + (ن - ١) د$

ويكون

$ح_ن = (أ ، أ + د ، أ + ٢د ، .... ، ل - ٢د ، ل - د ، ل)$

بزوده الاساس د ← ينقص الاساس د

ملاحظات هامة

1- لإيجاد رتبة أول حد موجب نضع $ح_ن > ٠$

2- لإيجاد رتبة أول حد سالب نضع $ح_ن < ٠$

مثال ٣: فى المتتابعه $(٩٥ ، ٩٢ ، ٨٩ ، ...)$ أوجد

1- قيمه $ح_٦$

2- رتبه الحد الذى = ٦٨

3- رتبة أول حد سالب

4- رتبة أول حد تقل قيمته عن ٥؟

الحل

$أ = ٩٥$ $د = ٩٢ - ٩٥ = -٣$

① $ح_٦ = أ + ٥د$

$= ٩٥ + (٥ × -٣) = ٨٠$

② $ح_ن = ٦٨$

$أ + (ن - ١) د = ٦٨$

$٩٥ + (ن - ١)(-٣) = ٦٨$

$-٣ (ن - ١) = ٦٨ - ٩٥$

$-٣ (ن - ١) = -٢٧$

$ن - ١ = ٩$

$ن = ٩ + ١$

$ن = ١٠$ الحد العاشر

③ بوضع $ح_ن < ٠$

$\therefore$ $أ + (ن - ١) ء < ٠$

$٩٥ - ٣ (ن - ١) < ٠$

$-٣ (ن - ١) < -٩٥$ ÷ (-٣)

$(ن - ١) > ٣١ \frac{٢}{٣}$

$ن > ٣٢ \frac{٢}{٣}$

$\therefore ن = ٣٣$

أى أن أول حد سالب هو $ح_{٣٣}$

④ رتبة أول حد تقل قيمته عن ٢٥

$ح_ن < ٢٥$

$أ + (ن - ١) ء < ٢٥$

$٩٥ - ٣ (ن - ١) < ٢٥$

$٩٥ - ٣ن + ٣ < ٢٥$

$-٣ن < ٢٥ - ٩٨$

$-٣ن < -٧٣$ ÷ (-٣)

$ن > ٢٤ \frac{١}{٣}$

$\therefore ن = ٢٥$

مثال ٤ فى المتتابعة $(ح_ن)$

$ح_ن = (-٤٢ ، -٣٩ ، -٣٦ ، ... ، ٤٢)$

أوجد

أ) عدد حدود المتتابعة

ب) رتبة وقيمة أول حد موجب

ج) هل يوجد حد قيمته -١١ ؟

كيفية تعيين المتتابعة

نوجد الحد العام بدلالة أ ← الحد الأول

و ء ← الأساس ونكون

معادلتين وبحلهم نحصل على قيمة أ ، ء

مثال ٥ أوجد المتتابعة الحسابية التى حدها الثالث = ٨ وحدها السادس = ١٧

الحل

$ح_٣ = ٨$ $أ + ٢ء = ٨$ ← ①

$ح_٦ = ١٧$ $أ + ٥ء = ١٧$ ← ②

$-٣ء = -٩$

$-٣ء = -٩$ $\therefore ء = \frac{-٩}{-٣} = ٣$

بالتعويض فى ①

$أ + ٢ × ٣ = ٨$

$أ + ٦ = ٨$ $أ = ٨ - ٦ = ٢$

المتتابعة هى (٢ ، ٥ ، ٨ ، ١١ ، ١٤ ، ١٧ ، ...)

مثال ٦ أوجد المتتابعة الحسابية التى حدها الثانى = ٩٢ وحدها السادس = ٨٠

الحل

مثال ٧ كون المتتابعة الحسابية التي حدها السادس = ١٧ ومجموع حديها الثالث والعاشر = ٣٧

الحل

ح٦ = ١٧ ⟸ أ + ٥ء = ١٧ ← (١)

∵ ح٣ + ح١٠ = ٣٧

أ + ٢ء + أ + ٩ء = ٣٧

٢أ + ١١ء = ٣٧ ← (٢)

بضرب الأولى × -٢ والجمع

٢أ + ١١ء = ٣٧

-٢أ - ١٠ء = -٣٤

ء = ٣

بالتعويض في (١)

أ + ٥×٣ = ١٧

أ = ١٧ - ١٥ ، أ = ٢

∴ المتتابعة هي (٢ ، ٥ ، ٨ ، ١١ ، ...)

مثال ٨ متتابعة حسابية حدها الثاني ٥ أمثال حدها السادس ومجموع مربعي حديها الأول والرابع ٤٠٥ فأوجد المتتابعة

الحل

∵ ح٢ = ٥ح٦

أ + ء = ٥(أ + ٥ء)

أ + ء = ٥أ + ٢٥ء

أ - ٥أ = ٢٥ء - ء

-٤أ = ٢٤ء ÷ (-٤)

أ = -٦ء ⟸ (١)

∵ ح١² + ح٤² = ٤٠٥

أ² + (أ + ٣ء)² = ٤٠٥

بالتعويض عن أ = -٦ء

∴ (-٦ء)² + (-٦ء + ٣ء)² = ٤٠٥

٣٦ء² + ٩ء² = ٤٠٥

٤٥ء² = ٤٠٥

ء² = ٤٠٥ / ٤٥ = ٩

∴ ء = ± ٣

عندما ء = ٣
∴ أ = -٦ × ٣ = -١٨
والمتتابعة هي (-١٨ ، -١٥ ، -١٢ ، ...)

عندما ء = -٣
∴ أ = -٦ × -٣ = ١٨
∴ المتتابعة هي (١٨ ، ١٥ ، ١٢ ، ...)

ملحوظة

ثلاثة أعداد في تتابع حسابي
(أ - ء ، أ ، أ + ء)

أربعة أعداد في تتابع حسابي
(أ - ٣ء ، أ - ء ، أ + ء ، أ + ٣ء)

مثال ٩ ثلاثة اعداد تكون متتابعة حسابية مجموعهم ٢١ وحاصل ضربهم ٢٣١ أوجد الاعداد

الحل

نفرض أن الاعداد هي أ - د ، أ ، أ + د

∵ مجموعهم = ٢١

∴ أ - د + أ + أ + د = ٢١

٣ أ = ٢١ ∴ أ = ٧

∵ حاصل ضربهم = ٢٣١

(أ - د) × أ × (أ + د) = ٢٣١

(٧ - د) × ٧ × (٧ + د) = ٢٣١

٧ (٤٩ - د٢) = ٢٣١

(٤٩ - د٢) = ٣٣

- د٢ = ٣٣ - ٤٩

- د٢ = -١٦

∴ د٢ = ١٦ ∴ د = ± ٤

عندما د = ٤	عندما د = -٤
الاعداد هي	الاعداد هي
٣ ، ٧ ، ١١	١١ ، ٧ ، ٣

الأوساط الحسابية

(أ ، ب ، جـ) متتابعة حسابية

ب هو الوسط الحسابي

ب - أ = جـ - ب

ب + ب = جـ + أ

∴ ٢ب = أ + جـ

ب = (أ + جـ) / ٢

إدخال عدد من الأوساط الحسابية بين عددين

(أ ، س١ ، س٢ ، س٣ ، ... ، ب)

عدد الحدود = عدد الأوساط + ٢

مثال ١٠ أدخل ٦ أوساط حسابية بين العددين ١ ، ٢٩

الحل

عدد الحدود = عدد الأوساط + ٢

∴ الحد الأول = ١ والحد الثامن = ٢٩

أ = ١ ← ①   أ + ٧د = ٢٩ ← ②

١ + ٧د = ٢٩   ٧د = ٢٩ - ١

٧د = ٢٨   ∴ د = ٢٨/٧ = ٤

∴ المتتابعة هي (١ ، ٥ ، ٩ ، ١٣ ، ١٧ ، ٢١ ، ٢٥ ، ٢٩)

والأوساط هي (٥ ، ٩ ، ١٣ ، ١٧ ، ٢١ ، ٢٥)

تدريب أدخل ٧ أوساط حسابية بين العددين -٢٤ ، ١٦



الحد السابع = أ + ٦د	الوسط السابع = أ + ٧د
الحد العاشر = أ + ٩د	الوسط العاشر = أ + ١٠د

الوسط الحسابي بين عددين = مجموع العددين / ٢

مثال ١١

متتابعة حسابية حدها التاسع = ٢٥ ، والوسط الحسابي بين حديها الثالث والخامس هو ١٠ أوجد المتتابعة

الحل

ح٩ = ٢٥

∴ أ + ٨د = ٢٥ ⟸ (١)

(ح٣ + ح٥) / ٢ = ١٠

ح٣ + ح٥ = ٢٠

أ + ٢د + أ + ٤د = ٢٠

٢أ + ٦د = ٢٠ (٢) ÷

أ + ٣د = ١٠

−أ − ٨د = −٢٥

−٥د = −١٥

∴ د = ٣

أ + ٢٤ = ٢٥

أ = ٢٥ − ٢٤ = ١

∴ المتتابعة هي (١ ، ٤ ، ٧ ، ١٠ ، ١٣ ، ١٦ ، ......)

مثال ١٢

إذا كان ب هو الوسط الحسابي بين أ ، جـ فأثبت أن

أ(٢ب + جـ − أ) = جـ(أ + ٢ب − جـ)

الحل

∵ ب وسط بين أ ، جـ

ب = (أ + جـ) / ٢ ⟸ ٢ب = (أ + جـ)

الطرف الأيمن

أ(أ + جـ + جـ − أ) = أ(٢جـ) = ٢أجـ

الطرف الأيسر

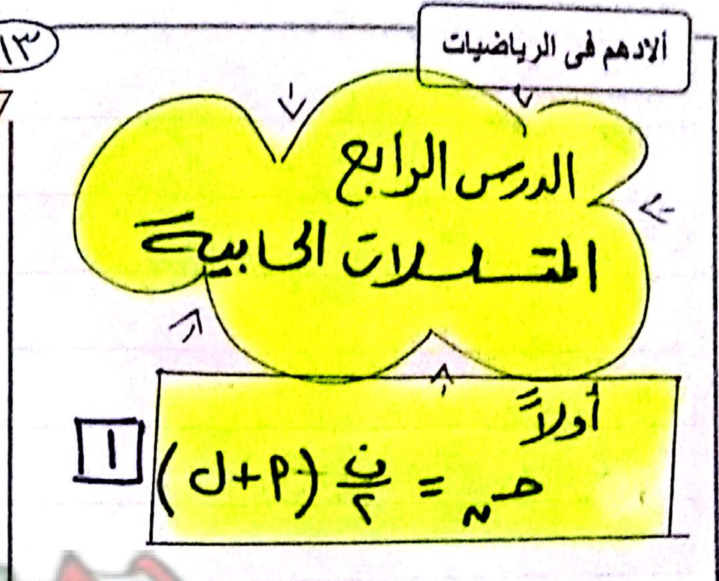
جـ(أ + أ + جـ − جـ) = جـ × ٢أ = ٢أجـ

∴ الطرفان متساويان

تدريب

إذا كانت ٢٢ ، س + ٩ ، ٣س − ١٤ ، ص حدود متتالية في متتابعة حسابية فأوجد قيمة س ، ص

الحل



أولاً

[١] $ح_ن = \frac{ن}{٢}(أ + ل)$

محتاجين:
ن ← عدد الحدود
أ ← الحد الاول
ل ← الحد الاخير

مثال

أوجد مجموع حدود المتسلسلة ٨٩ + ٨٥ + ٨١ + ... + ٣٣

الحل

أ = ٨٩ ، ل = ٣٣

أ + (ن - ١) ء = ٣٣ ← عشان نجيب عدد الحدود

ء = ٨٥ - ٨٩ = -٤

٨٩ + (ن - ١)(-٤) = ٣٣

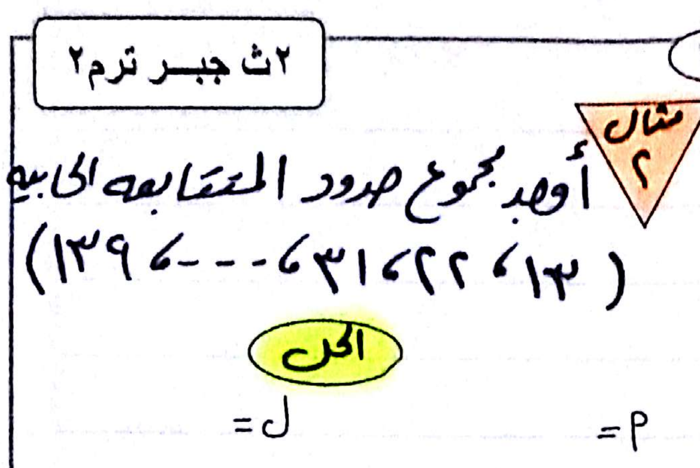
-٤(ن - ١) = ٣٣ - ٨٩ = -٥٦

ن - ١ = $\frac{-٥٦}{-٤}$ = ١٤

ن = ١٤ + ١ ، ن = ١٥

∴ $ح_ن = \frac{ن}{٢}(أ + ل)$

= $\frac{١٥}{٢}$ (٨٩ + ٣٣) = ٩١٥



مثال ٢

أوجد مجموع حدود المتتابعة الحسابية (١٣ ، ٢٢ ، ٣١ ، ...... ، ١٣٩)

الحل

أ = ، ل = ، ء =

(أكمل)

ثانياً

[٢] $ح_ن = \frac{ن}{٢}[٢أ + (ن - ١)ء]$

محتاجين:
أ ← الحد الاول
ء ← الاساس
ن ← عدد الحدود

مثال ٣

فى المتتابعة الحسابية (٩ ، ١٢ ، ١٥ ، ....) أوجد

١. مجموع ١٥ حداً الاولى منها
٢. مجموع الحدود من الخامس الى الحد الخامس عشر
٣. عدد الحدود التى مجموعها = ٧٥٠ ابتداءً من الاول

الحل

أ = ٩ ، ء = ١٢ - ٩ = ٣

أ = ٩ ، ء = ٣

[١]

$ح_ن = \frac{ن}{٢} [٢أ + (ن-١)ء]$

ن = ١٥

$\therefore ح_{١٥} = \frac{١٥}{٢} [٢×٩ + ١٤×٣]$

= ٤٥٠

[٢]

$ح_٥ = أ + ٤ء = ٩ + ٤×٣ = ٢١$

ده الأول فى الجديدة

$ح_{١٥} = أ + ١٤ء = ٩ + ١٤×٣ = ٥١$

ده الحد الاخير

عدد الحدود من الخامس الى الخامس عشر

ن = ١٥ - ٤ = ١١ حداً

$ح = \frac{ن}{٢}$ [الحد الاول + الحد الاخير]

$ح = \frac{١١}{٢} [٢١ + ٥١] = ٣٩٦$

تعرف تحلها بطريقة ثانية وثالثة

[٣]

$ح_ن = \frac{ن}{٢} [٢أ + (ن-١)ء] = ٧٥٠$

$\frac{ن}{٢} [٢أ + (ن-١)ء] = ٧٥٠$ ×٢

$ن(١٨ + ٣(ن-١)) = ١٥٠٠$

$ن(١٨ + ٣ن - ٣) = ١٥٠٠$

$١٨ن + ٣ن^٢ - ٣ن = ١٥٠٠$

$٣ن^٢ + ١٥ن - ١٥٠٠ = ٠$ ÷٣

$ن^٢ - ٥ن - ٥٠٠ = ٠$

$(ن - ٢٠)(ن + ٢٥) = ٠$

$\therefore$ ن = ٢٠ أو ن = -٢٥ مرفوض

مفيش عدد حدود بالسالب

مثال ٤

أوجد مجموع الاعداد المحصورة بين ١ ، ١٠١ والتى كل منها يقبل القسمة على ٣

الحل

الاعداد المحصورة بين ١ ، ١٠١ وتقبل القسمة على ٣ هى

٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٢ ، - - - - ، ٩٩

وهى تكون متتابعة حسابية

أ = ٣ ء = ٦ - ٣ = ٣

عدد الحدود $ح_ن = ل = ٩٩$

$أ + (ن-١)ء = ٩٩$

$٣ + ٣ن - ٣ = ٩٩$

$٣ن = ٩٩$ $\therefore$ ن = ٣٣ حداً

$\therefore ح_{٣٣} = \frac{٣٣}{٢} [٣ + ٩٩] = ١٦٨٣$

واذا كان مطلوب مجموع الاعداد التى لا تقبل القسمة على ٣

هنجيب المجموع كله ونطرح منه مجموع الاعداد التى تقبل القسمة والناتج هيكون هو مجموع الاعداد التى لا تقبل القسمة

فاهمين ؟

تدريب

أوجد المتتابعة الحسابية التى فيها $ح_١ = ٢٣$ ، $ح_ن = ٨٦$

$ح_ن = ٥٤٥$

مثال ٥ أوجد أكبر مجموع للمتتابعة (٤٥ ، ٤١ ، ٣٧ ، ....)

الحل

أكبر مجموع = مجموع الحدود الموجبة فقط

لذلك نضع ح_ن > ٠

أ = ٤٥ ، ء = ٤١ − ٤٥ = −٤

∴ أ + (ن − ١) ء > ٠

٤٥ + [−٤ (ن − ١)] > ٠

٤٥ − ٤ن + ٤ > ٠

−٤ن > −٤٩

ن < −٤٩ / −٤ ، ن < ١٢ ١/٤

∴ ن = ١٢

مجموع ١٢ حداً الموجبة

جـ١٢ = ١٢/٢ [٢أ + (ن − ١) ء]

= ١٢/٢ [٢ × ٤٥ + ١١ × (−٤)]

= ٢٧٦

تدريب كم حداً يلزم أخذه من حدود المتتابعة الحسابية (٣٥ ، ٣٠ ، ٢٥ ، ...) ابتداءً من حدها الأول فيكون المجموع ١٣٥ ؟ ثم أوجد مجموع الحدود من السابع إلى التاسع

الحل

ملحوظة: ح_ن = جـ_ن − جـ_ن−١

مثال ٦ إذا كان مجموع ن حداً من متتابعة حسابية يعطى بالقانون جـ_ن = ٣ن^٢ فأوجد المتتابعة ثم أوجد قيمة الحد التاسع عشر منها

الحل

ح_ن = جـ_ن − جـ_ن−١

ح_ن = ٣ن^٢ − [٣ (ن − ١)^٢]

= ٣ن^٢ − [٣ (ن^٢ − ٢ن + ١)]

= ٣ن^٢ − ٣ن^٢ + ٦ن − ٣

ح_ن = ٦ن − ٣

ح١ = ٣ ، ح٢ = ٩ ، ح٣ = ١٥

∴ المتتابعة هي (٣ ، ٩ ، ١٥ ، ...)

أ = ٣ ، ء = ٩ − ٣ = ٦

ح١٩ = أ + ١٨ء = ٣ + ١٨ × ٦ = ١١١

مثال ٧ اقترض رجل مبلغاً من المال واتفق على أن يسدد ١٠ أقساط قيمة الأول ٥٠٠ جنيه وكل قسط تالي يزيد بـ ٢٠٠ جنيه فما قيمة القرض

الحل

القسط الأول = ٥٠٠

القسط الثاني = ٥٠٠ + ٢٠٠ = ٧٠٠

القسط الثالث = ٧٠٠ + ٢٠٠ = ٩٠٠

⟸ (٥٠٠ ، ٧٠٠ ، ٩٠٠ ، ----)

أ = ٥٠٠ د = ٢٠٠ ن = ١٠

جـن = ن/٢ [٢أ + (ن - ١) د]

= ١٠/٢ [٢ × ٥٠٠ + (١٠ - ١) × ٢٠٠]

= ٥ (١٠٠٠ + ١٨٠٠) = ١٤٠٠٠

∴ مبلغ القرض = ١٤٠٠٠ جنيه

مثال ٨

بدأ مستر محمد أدهم براتب ١٩٢٠٠ جـ فإذا كان يحصل على علاوة سنوية مقدارها ٤٨٠ جنيهاً فكم يكون جملة ما يحصل عليه من رواتب في نهاية السنة العاشرة.

الحل

الراتب يساوي البداية أ = ١٩٢٠٠

الزيادة (د) = ٤٨٠

ن = ١٠

جـن = ن/٢ [٢أ + (ن - ١) د]

جـ١٠ = ١٠/٢ [٢ × ١٩٢٠٠ + ٩ × ٤٨٠]

= ٢١٣٦٠٠ جنيه

والله ما شفت منهم حاجه

مثال ٩

وفر رجل في نهاية سنة ما مبلغ ٧٥٠٠ جنيه ثم أخذ يزيد ما يوفره كل سنة بمقدار ١٥٠٠ جنيه عن السنة السابقة أوجد

(١) مقدار ما يوفره في السنة السابعة عشر

(٢) جملة ما يوفره في ١٧ عاماً

الحل

أ = ٧٥٠٠ د = ١٥٠٠

(١) الذي يوفره في السنة السابعة عشر

ح١٧ = أ + ١٦د

= ٧٥٠٠ + ١٦ × ١٥٠٠ = ٣١٥٠٠ جنيه

(٢) جملة ما يوفره في ١٧ عاماً

جـن = ن/٢ [٢أ + (ن - ١) د]

= ١٧/٢ [٢ × ٧٥٠٠ + ١٦ × ١٥٠٠]

= ٣٣١٥٠٠ جنيهاً

الدرس الخامس

المتتابعه الهندسيه

اساس المتتابعه الهندسيه

$$ر = \frac{ح_{ن+1}}{ح_ن} = \frac{\text{أى حد}}{\text{الحد السابق له}}$$

الحد النونى $ح_ن = أ\, ر^{ن-1}$

$ح_1 = أ$ ، $ح_2 = أ\, ر$

$ح_3 = أ\, ر^{2}$ ، $ح_4 = أ\, ر^{3}$

$ح_{100} = أ\, ر^{99}$ ، $ح_ن = أ\, ر^{ن-1}$

$(أ ، أ ر ، أ ر^2 ، \ldots\ldots ، \frac{ل}{ر^3} ، \frac{ل}{ر} ، ل)$

مثال ١

إذا كان $ح_ن = ٥ \times (-٢)^{ن-٥}$ فاثبت أنها هندسيه وأوجد $ح_7$

الحل

$ح_ن = ٥ \times (-٢)^{ن-٥}$

$ح_{ن+1} = ٥ \times (-٢)^{ن+1-٥} = ٥ \times (-٢)^{ن-٤}$

$\frac{ح_{ن+1}}{ح_ن} = \frac{٥ \times (-٢)^{ن-٤}}{٥ \times (-٢)^{ن-٥}} = (-٢)^{ن-٤-ن+٥}$

$= (-٢)^{١} = -٢$ مقدار ثابت

∴ المتتابعه هندسيه $ر = -٢$

ولإيجاد الحد السابع نضع $ن = ٧$

$ح_7 = ٥ \times (-٢)^{٧-٥} = ٥ \times (-٢)^{٢} = ٢٠$

مثال ٢

أوجد رتبة الحد الذى قيمته = ١٢٨ من المتتابعه الهندسيه (٢، ٤، ٨، ....) ثم أوجد الحد العاشر منها

الحل

$أ = ٢$ ، $ر = \frac{٤}{٢} = ٢$

$ح_ن = ١٢٨$

$أ\, ر^{ن-1} = ١٢٨$

$٢ \times ٢^{ن-1} = ١٢٨$

$٢^{ن-1+1} = ١٢٨$

$٢^{ن} = ٢^{٧}$ ∴ $ن = ٧$

يعنى الحد السابع

المطلوب الثانى

$ح_{10} = أ\, ر^{9} = ٢ \times ٢^{9} = ١٠٢٤$

أوجد $ح_6 =$

$ح_9 =$

مثال ٣ ما رتبة أول حد تزيد قيمته عن ٥٠٠ فى المتتابعة الهندسية (٦، ١٢، ٢٤، ...)

الحل

أ = ٦ ، ر = $\frac{١٢}{٦}$ = ٢

ح$_{ن}$ = أ ر$^{ن-١}$ > ٥٠٠

٦ × ٢$^{ن-١}$ > ٥٠٠

بأخذ لوغاريتم للطرفين

لو [٦ × ٢$^{(ن-١)}$] > لو ٥٠٠

لو ٦ + (ن-١) لو ٢ > لو ٥٠٠

لو ٦ + ن لو ٢ - لو ٢ > لو ٥٠٠

ن لو ٢ > لو ٥٠٠ - لو ٦ + لو ٢

ن > $\frac{\text{لو ٥٠٠ - لو ٦ + لو ٢}}{\text{لو ٢}}$

ن > ٧,٣٨ ∴ **ن = ٨**

قيمة ح$_{٨}$ = أ ر^{٧} = ٦ × ٢^{٧} = ٧٦٨

مثال ٤ متتابعة هندسية حدها الأول = ٢ وحدها السادس = ٦٤ أوجد المتتابعة

الحل

ح$_{١}$ = ٢ ∴ أ = ٢ ← (١)

ح$_{٦}$ = ٦٤ أ ر^{٥} = ٦٤ ← (٢)

∴ أ = ٢

٢ ر^{٥} = ٦٤

ر^{٥} = $\frac{٦٤}{٢}$ ر^{٥} = ٣٢

ر^{٥} = ٢^{٥} ∴ ر = ٢

∴ المتتابعة هى

(٢، ٤، ٨، ١٦، ...)

مثال ٥ متتابعة هندسية حدها الثالث = ١٢ وحدها الثامن = ٣٨٤ أوجد المتتابعة ثم أوجد ح$_{١٠}$

الحل

ملاحظة

١) ١ - ر^{٢} = (١ - ر) (١ + ر)

٢) ١ - ر^{٣} = (١ - ر) (١ + ر + ر^{٢})

٣) ١ + ر^{٣} = (١ + ر) (١ - ر + ر^{٢})

٤) ١ + ر^{٢} + ر^{٤} = (١ - ر + ر^{٢}) (١ + ر + ر^{٢})

مثال ٦

متتابعة هندسية مجموع حديها الأول والثاني = ٧٢ ومجموع حديها الثالث والرابع = ٨ أوجد المتتابعة

الحل

$\because ح_1 + ح_2 = 72 \quad \therefore أ + أر = 72$

$أ(1+ر) = 72 \longleftarrow (1)$

$\because ح_3 + ح_4 = 8 \quad \therefore أر^2 + أر^3 = 8$

$أر^2(1+ر) = 8 \longleftarrow (2)$

بقسمة (٢) على (١) : $\frac{أر^2(1+ر)}{أ(1+ر)} = \frac{8}{72}$

$\therefore ر^2 = \frac{1}{9} \quad \therefore ر = \pm\frac{1}{3}$

عندما $ر = \frac{1}{3}$

$\therefore أ(1+\frac{1}{3}) = 72$

$أ = 72 \div 1\frac{1}{3}$

$= 54$

والمتتابعة هي $(54 ، 18 ، 6 ، \dots)$

عندما $ر = -\frac{1}{3}$

$أ(1-\frac{1}{3}) = 72$

$أ = 72 \div \frac{2}{3}$

$أ = 108$

والمتتابعة هي $(108 ، -36 ، 12 ، \dots)$

مثال ٧

متتابعة هندسية مجموع الثلاثة حدود الأولى منها = −٢٤ ومجموع الثلاثة حدود التالية = ٣ فأوجدها

الحل

$\because ح_1 + ح_2 + ح_3 = -24$

$أ + أر + أر^2 = -24$

$أ(1 + ر + ر^2) = -24 \longleftarrow (1)$

$\because ح_4 + ح_5 + ح_6 = 3$

$أر^3 + أر^4 + أر^5 = 3$

$أر^3(1 + ر + ر^2) = 3 \longleftarrow (2)$

بقسمة $\frac{(2)}{(1)}$: $\frac{أر^3(1+ر+ر^2)}{أ(1+ر+ر^2)} = \frac{3}{-24}$

$ر^3 = \frac{-1}{8} \quad \therefore ر = \sqrt[3]{\frac{-1}{8}} = \frac{-1}{2}$

بالتعويض في (١)

$أ\left(1 + (\frac{-1}{2}) + (\frac{-1}{2})^2\right) = -24$

$أ \times \frac{3}{4} = -24$

$أ = -24 \times \frac{4}{3} = -32$

$\therefore$ المتتابعة هي $(-32 ، 16 ، -8 ، \dots)$

تدريب

متتابعة هندسية فيها $ح_5 = 8 ح_2$ ، $ح_4 + ح_6 = 240$ فأوجد المتتابعة



إذا كان أ ، ب ، جـ في تتابع هندسي فإن ب هو الوسط الهندسي لـ (أ ، جـ)

$ب^{2} = أ\,جـ$

$ب = \pm\sqrt{أ\,جـ}$

إدخال عدد من الأوساط الهندسية بين كميتين معلومتين

عدد الحدود = عدد الأوساط + ٢

الوسط الأول = الحد الثاني = أ ر

الوسط الخامس = الحد السادس = أ $ر^{٥}$

وهكذا

الوسط الحسابي لعددين حقيقيين مختلفين أكبر من وسطهما الهندسي الموجب

$\frac{أ+جـ}{2} > \sqrt{أ \times جـ}$



أدخل ٣ أوساط هندسية بين ٢ ، ٣٢

الحل

عدد الأوساط = ٣ ∴ عدد الحدود = ٣ + ٢ = ٥

أ = ٢ ، $ح_{٥}$ = ٣٢

أ $ر^{٤}$ = ٣٢ ، ٢ $ر^{٤}$ = ٣٢

$ر^{٤}$ = $\frac{٣٢}{٢}$ = ١٦ = $٢^{٤}$

∴ ر = ±٢

عندما ر = -٢	عندما ر = ٢
الأوساط هي	الأوساط هي
-٤ ، ٨ ، -١٦	٤ ، ٨ ، ١٦

مثال ٩
عددان موجبان الوسط الحسابي لهما ١٠ ووسطهما الهندسي = ٨ فما هما العددان

الحل

نفرض أن العددان هما أ ، جـ

∵ الوسط الحسابي = ١٠ ∴ $\frac{أ+جـ}{٢}$ = ١٠

∴ أ + جـ = ٢٠ ← ①

∵ الوسط الهندسي = ٨ ∴ $\pm\sqrt{أ\,جـ}$ = ٨

أ جـ = ٦٤ ← ②

من ① جـ = ٢٠ - أ بالتعويض في ②

أ (٢٠ - أ) = ٦٤

٢٠ أ - $أ^{٢}$ = ٦٤

$أ^{٢}$ - ٢٠ أ + ٦٤ = ٠

(أ - ٤) (أ - ١٦) = ٠

أو أ = ١٦	أ = ٤
∴ جـ = ٤	حيث جـ = ١٦

∴ العددان هما ٤ ، ١٦

مثال ١٠

إذا أدخلنا عدة أوساط هندسية بين ٣ ، ٣٨٤ وكانت النسبة بين مجموع الوسطين الأولين إلى مجموع الوسطين الأخيرين ١ : ١٦ فما عدد هذه الأوساط

الحل

المتتابعة هي

$(٣ ، ٣\text{ر} ، ٣\text{ر}^{٢} ، \dots ، \frac{٣٨٤}{\text{ر}^{٢}} ، \frac{٣٨٤}{\text{ر}} ، ٣٨٤)$

$(٣\text{ر} + ٣\text{ر}^{٢}) \div \left(\frac{٣٨٤}{\text{ر}^{٢}} + \frac{٣٨٤}{\text{ر}}\right) = \frac{١}{١٦}$

$٣\text{ر}(١+\text{ر}) \div \frac{٣٨٤ + ٣٨٤\text{ر}}{\text{ر}^{٢}} = \frac{١}{١٦}$

$٣\text{ر}(١+\text{ر}) \times \frac{\text{ر}^{٢}}{٣٨٤(١+\text{ر})} = \frac{١}{١٦}$

$\frac{\text{ر}^{٣}}{١٢٨} = \frac{١}{١٦}$

$\text{ر}^{٣} = \frac{١٢٨ \times ١}{١٦} = ٨$

$\text{ر}^{٣} = ٨$ ∴ $\text{ر} = \sqrt[٣]{٨} = ٢$

∴ الأوساط هي

$(٦ ، ١٢ ، \dots ، ٩٦ ، ١٩٢)$

$\times ٢ \leftarrow$ $\rightarrow \div ٢$

$\text{ح}_{\text{ن}} = ١٩٢$ $\quad$ $\text{أ}\,\text{ر}^{\text{ن}-١} = ١٩٢$

$٦ \times ٢^{\text{ن}-١} = ١٩٢$

$٢^{\text{ن}-١} = \frac{١٩٢}{٦} = ٣٢$

$٢^{\text{ن}-١} = ٢^{٥}$

$\text{ن} - ١ = ٥$ $\quad$ ∴ $\text{ن} = ٥ + ١ = ٦$

∴ عدد الأوساط = ٦

مثال ١١

إذا كانت ٤ ، ب ، جـ في تتابع حسابي وكانت ٢ ، ب+٣ ، ٥جـ في تتابع هندسي فأوجد قيمة ب ، جـ

الحل

∵ ٤ ، ب ، جـ في تتابع حسابي

∴ $\text{ب} = \frac{٤ + \text{جـ}}{٢}$ $\quad$ $٤ + \text{جـ} = ٢\text{ب}$

∴ $\boxed{\text{جـ} = ٢\text{ب} - ٤}$ ← (١)

∵ (٢ ، ب+٣ ، ٥جـ) في تتابع هندسي

∴ $(\text{ب}+٣)^{٢} = ١٠\text{جـ}$ ← (٢)

من (١) ، (٢)

$\text{ب}^{٢} + ٦\text{ب} + ٩ = ١٠(٢\text{ب} - ٤)$

∴ $\text{ب}^{٢} + ٦\text{ب} + ٩ = ٢٠\text{ب} - ٤٠$

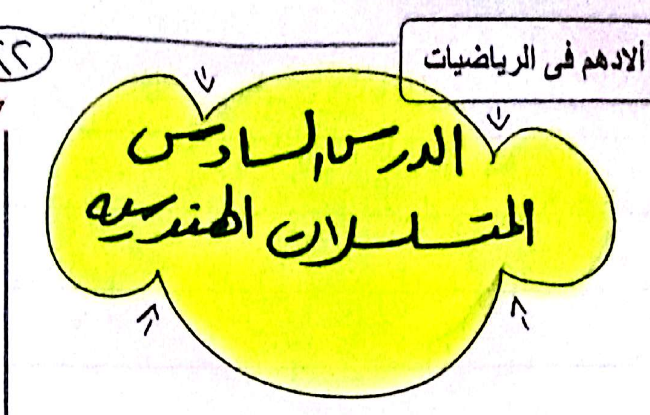
$\text{ب}^{٢} + ٦\text{ب} - ٢٠\text{ب} + ٩ + ٤٠ = ٠$

$\text{ب}^{٢} - ١٤\text{ب} + ٤٩ = ٠$

$(\text{ب} - ٧)^{٢} = ٠$

∴ ب = ٧

∴ $\text{جـ} = ٢ \times ٧ - ٤ = ١٠$



$$\text{ج}_{ن} = \frac{\text{أ}(١ - \text{ر}^{ن})}{١ - \text{ر}}$$

ج ن ← مجموع المتتابعة الهندسية

أ ← الحد الأول

ر ← الأساس

ن ← عدد الحدود

ل ← الحد الأخير

$$\text{ج}_{ن} = \frac{\text{أ} - \text{ل ر}}{١ - \text{ر}}$$

مثال ١

أوجد مجموع المتتابعة الهندسية إلى ٨ حدود (٣، ٦، ١٢، ...)

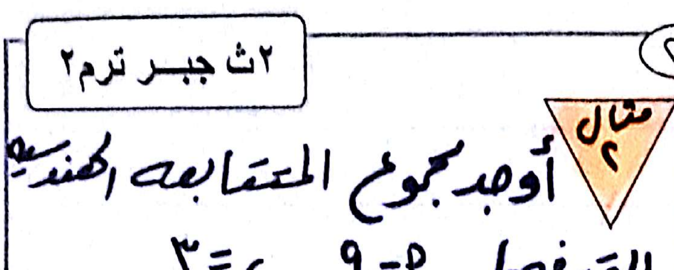
الحل

أ = ٣ ، ر = ٦/٣ = ٢

ن = ٨

$$\text{ج}_{ن} = \frac{\text{أ}(١ - \text{ر}^{ن})}{١ - \text{ر}}$$

$$\text{ج}_{٨} = \frac{٣(١ - ٢^{٨})}{١ - ٢} = ٧٦٥$$



مثال ٢

أوجد مجموع المتتابعة الهندسية التي فيها أ = ٩ ، ر = ٣ ، ل = ٦٥٦١

الحل

أ = ٩ ، ر = ٣ ، ل = ٦٥٦١

$$\text{ج}_{ن} = \frac{\text{أ} - \text{ل ر}}{١ - \text{ر}} = \frac{٩ - ٦٥٦١ \times ٣}{١ - ٣} = ٩٨٣٧$$

مثال ٣

أوجد مجموع المتسلسلات الهندسية التالية

(أ) $\sum_{ر=٧}^{١٦} \frac{١}{٨}(٢)^{ر-١}$

الحل

الحد الأول في المجموع ح٧

$\text{ح}_{٧} = \frac{١}{٨} \times ٢^{٧-١} = ٨$ ← أ

ر = ٢ ← الأساس

عدد الحدود ن = ١٦ − ٦ = ١٠ حدود

لأنه إبتداءً من السابع

$$\text{ج}_{ن} = \frac{\text{أ}(١ - \text{ر}^{ن})}{١ - \text{ر}}$$

$$\text{ج}_{١٠} = \frac{٨(١ - ٢^{١٠})}{١ - ٢} = \frac{٨ \times (-١٠٢٣)}{-١}$$

$= ٨١٨٤$

مثال ٤

أوجد مجموع ١٥ حداً الأولى من المتتابعة

(١ ، ١٫٠٤ ، $(١٫٠٤)^{٢}$ ، ...)

لأقرب عدد صحيح

الحل

أ = ١ ، ر = $\frac{١٫٠٤}{١}$ = ١٫٠٤ ، ن = ١٥

$ج_ن = \frac{أ(١ - ر^ن)}{١ - ر} = \frac{١[١ - (١٫٠٤)^{١٥}]}{١ - ١٫٠٤}$

$\simeq ٢٠$

مثال ٥

كم حداً يلزم أخذه من المتتابعة الهندسية (٢ ، ٤ ، ٨ ، ...) إبتداءً من الحد الأول ليكون المجموع ٢٥٤

الحل

أ = ٢ ، ر = $\frac{٤}{٢}$ = ٢ ، $ج_ن$ = ٢٥٤

$ج_ن = \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١} = ٢٥٤$

$\frac{٢(٢^ن - ١)}{٢ - ١} = ٢٥٤$

$٢(٢^ن - ١) = ٢٥٤$ ÷ ٢

$(٢^ن - ١) = ١٢٧$

$٢^ن = ١٢٧ + ١$ ، $٢^ن = ١٢٨$

$٢^ن = ٢^٧$ ∴ عدد الحدود المطلوبة

= ٧ حدود

مثال ٦

متتابعة هندسية حدها الأول ٢ وحدها الرابع ٥٤ أوجد أقل عدد من حدودها يلزم أخذه من الحد الأول ليكون المجموع أكبر من ٥٠٠٠

الحل

∵ $ح_١ = ٢$ ، أ = ٢

∵ $ح_٤ = ٥٤$ ، $أر^٣ = ٥٤$

$٢ر^٣ = ٥٤$ ، $ر^٣ = \frac{٥٤}{٢} = ٢٧$

$ر = \sqrt[٣]{٢٧}$ ، ر = ٣

∵ $ج_ن = \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١} > ٥٠٠٠$

$\frac{٢(٣^ن - ١)}{(٣ - ١)} > ٥٠٠٠$

$٣^ن - ١ > ٥٠٠٠$

$٣^ن > ٥٠٠١$ بأخذ اللوغاريتم

لو $٣^ن$ > لو ٥٠٠١

ن لو ٣ > لو ٥٠٠١

ن > $\frac{لو ٥٠٠١}{لو ٣}$

ن > ٧٫٧٥ ∴ ن = ٨

يعني ٨ حدود

مثال ٧ اذا كان مجموع ن حداً من متتابعة هندسية يعطى بـ $ج_ن = ٣ (٢^ن - ١)$

١ أوجد المتتابعة.

٢ أوجد قيمة الحد السابع منها.

الحل

١ ∵ $ج_ن = ٣ (٢^ن - ١)$

$أ = ج_١ = ٣(٢ - ١) = ٣$

∴ $أ = ٣$ ← ①

$ج_٢ = ٣(٢^٢ - ١) = ٩$ يعنى مجموع الحد الأول والثانى

∴ $ح_٢ = ٩ - ٣ = ٦$

∴ المتتابعة هى (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ...)

$أ = ٣$ $ر = \frac{٦}{٣} = ٢$

٢ $ح_٧ = أ ر^٦ = ٣ × ٢^٦ = ١٩٢$

المتسلسلات اللانهائية

إذا كان $-١ < ر < ١$

$ج_∞ = \frac{أ}{١ - ر}$

← مجموع عدد لانهائى من حدودها

شرط أن يكون للمتتابعة مجموع عدد لانهائى أن يكون الأساس بين -١ ، +١

$-١ < ر < ١$

عدد عشرى أو كسر بسطه أصغر من مقامه

$|ر| < ١$

مثال ٨ بين أى من المتتابعات الآتية يمكن جمعها إلى مالانهاية وأوجد المجموع إن أمكن

١ $(ح_ن) = (٤ × ٣^{٢-ن})$

الحل

$ح_ن = ٤ × ٣^{٢-ن}$

$ح_{ن+١} = ٤ × ٣^{٢-(ن+١)} = ٤ × ٣^{١-ن}$

∴ $\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = \frac{٤ × ٣^{١-ن}}{٤ × ٣^{٢-ن}} = ٣^{ن+٢-ن-١}$

$= ٣^{-١} = \frac{١}{٣}$

∴ يمكن جمع المتتابعة الى مالانهاية

$ح_١ = ٤ × ٣^{٢-١} = ١٢$ ∴ $أ = ١٢$

$ج_∞ = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{١٢}{١ - \frac{١}{٣}} = ١٨$

٢) $(ح_ن) = (٣ - ٢ن)$

الحل

$(٣ - ٢ن)$ ← مقدار من الدرجة الأولى تكون المتتابعة حسابية وليست هندسية لذلك لا يمكن جمع عدد لا نهائي منها ولو مش مصدقني اسألها

---

٣) $(٢ ، -١ ، \frac{١}{٢} ، ......)$

الحل

$ر = \frac{ح_٢}{ح_١} = \frac{-١}{٢}$ ، $أ = ٢$

∴ المتتابعة هندسية وأساسها $(\frac{-١}{٢})$ ، $|\frac{-١}{٢}| < ١$

∴ يمكن جمع عدد لا نهائي منها

$$ج_\infty = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{٢}{١ - (\frac{-١}{٢})} = \frac{٤}{٣}$$

---

٤) $(\frac{١}{٨} ، \frac{٣}{١٦} ، \frac{٩}{٣٢} ، ......)$

الحل

حل انت بقى

مثال ٩

$(ح_ن)$ متتابعة هندسية فيها $ح_١ + ح_٤ = ٧٠$ ، $ح_٢ + ح_٣ = ٦٠$ اثبت أنه توجد متتابعتان وأنه يمكن إيجاد مجموع عدد غير منتهٍ من حدود احداهما واوجد هذا المجموع بدءًا من حدها الاول

الحل

∵ $ح_١ + ح_٤ = ٧٠$ ⇐ $أ + أ ر^٣ = ٧٠$ ← ①

$ح_٢ + ح_٣ = ٦٠$ ⇐ $أ ر + أ ر^٢ = ٦٠$ ← ②

بقسمة (١) ÷ (٢) : $\frac{أ(١ + ر^٣)}{أ ر(١ + ر)} = \frac{٧٠}{٦٠}$

$$= \frac{(١ + ر)(١ - ر + ر^٢)}{ر(١ + ر)} = \frac{٧}{٦}$$

∴ $٦(١ - ر + ر^٢) = ٧ر$

$٦ر^٢ - ٦ر + ٦ - ٧ر = ٠$

$٦ر^٢ - ١٣ر + ٦ = ٠$

$(٢ر - ٣)(٣ر - ٢) = ٠$

$٢ر - ٣ = ٠$	$٣ر - ٢ = ٠$
$٢ر = ٣$	$٣ر = ٢$
$ر = \frac{٣}{٢}$	$ر = \frac{٢}{٣}$

ر = $\frac{٣}{٢}$

بالتعويض في (١)

أ + أ $(\frac{٣}{٢})^{٣}$ = ٧٠

أ + أ $\frac{٢٧}{٨}$ = ٧٠

٧٠ = $\frac{٣٥}{٨}$ × أ

أ = ٧٠ × $\frac{٨}{٣٥}$ = ١٦

∴ المتتابعة هي (١٦، ٢٤، ٣٦، ...)

ولا يمكن إيجاد مجموع عدد لانهائي منها

لأن |ر| > ١

ر = $\frac{٢}{٣}$

بالتعويض في (١)

أ + أ $(\frac{٢}{٣})^{٣}$ = ٧٠

أ + أ × $\frac{٨}{٢٧}$ = ٧٠

٧٠ = أ $\frac{٣٥}{٢٧}$

أ = ٧٠ × $\frac{٢٧}{٣٥}$ = ٥٤

المتتابعة هي (٥٤، ٣٦، ٢٤، ...)

|ر| < ١

جـ = $\frac{أ}{١ - ر}$ = $\frac{٥٤}{١ - \frac{٢}{٣}}$ = ١٦٢

مثال ١٠

متتابعة هندسية أي حد من حدودها يساوي ضعف مجموع الحدود التالية له إلى ∞ من الحدود أوجد أساسها وإذا كان حدها الثالث = ٩ فأوجد المتتابعة

الحل

نفرض أن المتتابعة هي

(أ، أر، أر^{٢}، ...)

∵ أي حد من حدودها = ضعف مجموع الحدود التالية إلى ∞

∴ أ = ٢ (أر + أر^{٢} + أر^{٣} + ...)

∴ أ = ٢ × $\frac{أر}{١ - ر}$ ← الحد الأول الجديد

أ(١ - ر) = ٢ أر

أ - أر = ٢ أر ÷ (أ)

١ - ر = ٢ر

١ = ٢ر + ر ، ٣ر = ١

ر = $\frac{١}{٣}$

∵ ح$_{٣}$ = ٩ ∴ أر^{٢} = ٩

∴ أ $(\frac{١}{٣})^{٢}$ = ٩ ∴ أ × $\frac{١}{٩}$ = ٩

أ = ٨١

∴ المتتابعة هي (٨١، ٢٧، ٩، ...)

مثال ١١

مجموع عدد غير منته من حدود متتابعة هندسية = ٤ وحدها الثاني = -٣ أوجد المتتابعة

الحل

تحويل الكسر العشري الدائري إلى كسر اعتيادي

$\frac{1}{3}$ = ٠,٣٣٣٣... = ٠,$\overline{3}$

$\frac{5}{9}$ = ٠,٥٥٥٥٥... = ٠,$\overline{5}$

$\frac{1}{6}$ = ٠,١٦٦٦٦... = ٠,١$\overline{6}$

$\frac{5}{33}$ = ٠,١٥١٥١٥... = ٠,$\overline{15}$

$\frac{14}{111}$ = ٠,١٢٦١٢٦١٢٦... = ٠,$\overline{126}$

مثال ١٢ ضع كلاً من الكسور العشرية الدائرية الآتية على صورة كسر اعتيادي

[١] ٠,$\overline{7}$ [٢] ٠,$\overline{24}$ [٣] ٣,٤$\overline{12}$

الحل

[١] ٠,$\overline{7}$ = ٠,٧٧٧٧٧

= ٠,٧ + ٠,٠٧ + ٠,٠٠٧ + ...

متسلسلة هندسية حدها الأول = ٠,٧

أ = ٠,٧ ر = ٠,١

جـ∞ = $\frac{أ}{1-ر}$ = $\frac{0.7}{1-0.1}$ = $\frac{7}{9}$

∴ ٠,$\overline{7}$ = $\frac{7}{9}$

[٢] ٠,$\overline{24}$ = ٠,٢٤٢٤٢٤...

∴ ٠,$\overline{24}$ = ٠,٢٤ + ٠,٠٠٢٤ + ٠,٠٠٠٠٢٤ + ...

أ = ٠,٢٤ ر = ٠,٠١

٠,$\overline{24}$ = $\frac{أ}{1-ر}$ = $\frac{0.24}{1-0.01}$ = $\frac{8}{33}$

[٣] ٣,٤$\overline{12}$ = ٣,٤١٢١٢١٢...

= ٣,٤ + ٠,٠١٢ + ٠,٠٠٠١٢ + ٠,٠٠٠٠٠١٢ + ...

= ٣,٤ + [٠,٠١٢ + ٠,٠٠٠١٢ + ٠,٠٠٠٠٠١٢ + ...]

أ = ٠,٠١٢ ر = ٠,٠١

= ٣,٤ + $\frac{أ}{1-ر}$

= ٣,٤ + $\frac{0.012}{1-0.01}$ = $\frac{563}{165}$

سيبك من الكلام ده وخد طريقة أبو أدهم انت تمسك العدد الدائري تملأ بيه شارحة الآلة وتروح عامل = يطلع العدد على صورة كسر ((أى هدف))

الدرس السابع
مبدأ العد التباديل

مثال ١ مطعم يقدم ٧ أنواع من الفطائر و ٥ أنواع من السلطه و ٣ أنواع من المشروبات كم عدد الوجبات التى يمكن أن يقدمها يومياً بحيث تشتمل على نوع واحد من الفطائر أو السلطه أو المشروبات

الحل

عدد طرق تقديم الفطائر = ٧

عدد طرق تقديم السلطه = ٥

عدد طرق تقديم المشروبات = ٣

عدد طرق تقديم الثلاثه معاً

= ٧×٥×٣ = ١٠٥ طريقة

مثال ٢ كم عدد الاعداد المكونه من ثلاثة أرقام مختلفه من الأرقام {٠، ١، ٢، ٣} ؟

الحل

① عدد طرق اختيار الرقم فى خانة المئات = ٣

استبعدنا الصفر على الشمال ملوش لازمة

② عدد طرق اختيار الرقم فى خانة العشرات = ٣

③ فى خانة الآحاد = ٢

∴ عدد الطرق = ٣×٣×٢ = ١٨ طريقة

مثال ٣ كم عدد الاعداد المكونه من اربعة ارقام مختلفه مأخوذة من العناصر {٢، ٣، ٦، ٨} بحيث يكون رقم الآحاد = ٦

الحل

احتمال مشروط لأنه شرط أن الآحاد = ٦ لذلك نبدأ بالآحاد

① عدد طرق الآحاد = ١

② عدد طرق العشرات = ٣

③ " " المئات = ٢

④ " " الآلاف = ١

عدد الطرق الممكنه = ١×٣×٢×١ = ٦ طرق

مثال ٤ كم عدد الاعداد المكونه من ٣ أرقام مختلفه {٢، ٣، ٦، ٧، ٨} بحيث يكون أصغر من ٨٠٠ ؟

الحل

المئات يجب أن يكون أقل من ٨

(أكمل)

مضروب العدد $\underline{|ن}$

$\underline{|ن} = ن\,(ن-١)\,(ن-٢) \cdots\cdots ٣ \times ٢ \times ١$

ن عدد صحيح موجب

$\underline{|٠} = ١$

$\underline{|ن} = ن\ \underline{|ن-١}$

$\underline{|٦} = ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١$

$\underline{|٥} = ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١$

$\underline{|٦} = ٦\ \underline{|٥} = ٦ \times ٥\ \underline{|٤}$

مثال ٥

أوجد قيمة

(أ) $\dfrac{\underline{|١٠}}{\underline{|٨}} = \dfrac{١٠ \times ٩ \times \underline{|٨}}{\underline{|٨}} = ١٠ \times ٩ = ٩٠$

(ب) $\dfrac{\underline{|٩}}{\underline{|١٠}} = \dfrac{\underline{|٩}}{١٠\ \underline{|٩}} = \dfrac{١}{١٠} = ٠٫١$

(جـ) $\dfrac{\underline{|٧}}{\underline{|٥}} + \dfrac{\underline{|٩}}{\underline{|٧}} = \dfrac{٧ \times ٦ \times \underline{|٥}}{\underline{|٥}} + \dfrac{٩ \times ٨ \times \underline{|٧}}{\underline{|٧}} = (٧ \times ٦) + (٩ \times ٨) = ١١٤$

مثال ٦

إذا كان $\underline{|ن} = ١٢٠$ فأوجد قيمة ن

الحل

بالتحليل

١٢٠	١
١٢٠	٢
٦٠	٣
٢٠	٤
٥	٥
١	

$\because ١٢٠ = ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١$

$\therefore ١٢٠ = \underline{|٥}$

$\therefore ن = ٥$

مثال ٧

إذا كان

$\dfrac{١}{\underline{|ن}} + \dfrac{٢}{\underline{|ن+١}} = \dfrac{٥٦}{\underline{|ن+٢}}$

فأوجد قيمة ن

الحل

$\dfrac{١}{\underline{|ن}} + \dfrac{٢}{(ن+١)\ \underline{|ن}} = \dfrac{٥٦}{(ن+٢)(ن+١)\ \underline{|ن}}$

بالضرب × $\underline{|ن}$ جميع الحدود

$١ + \dfrac{٢}{ن+١} = \dfrac{٥٦}{(ن+١)\ (ن+٢)}$

بالضرب × $[(ن+٢) \times (ن+١)]$

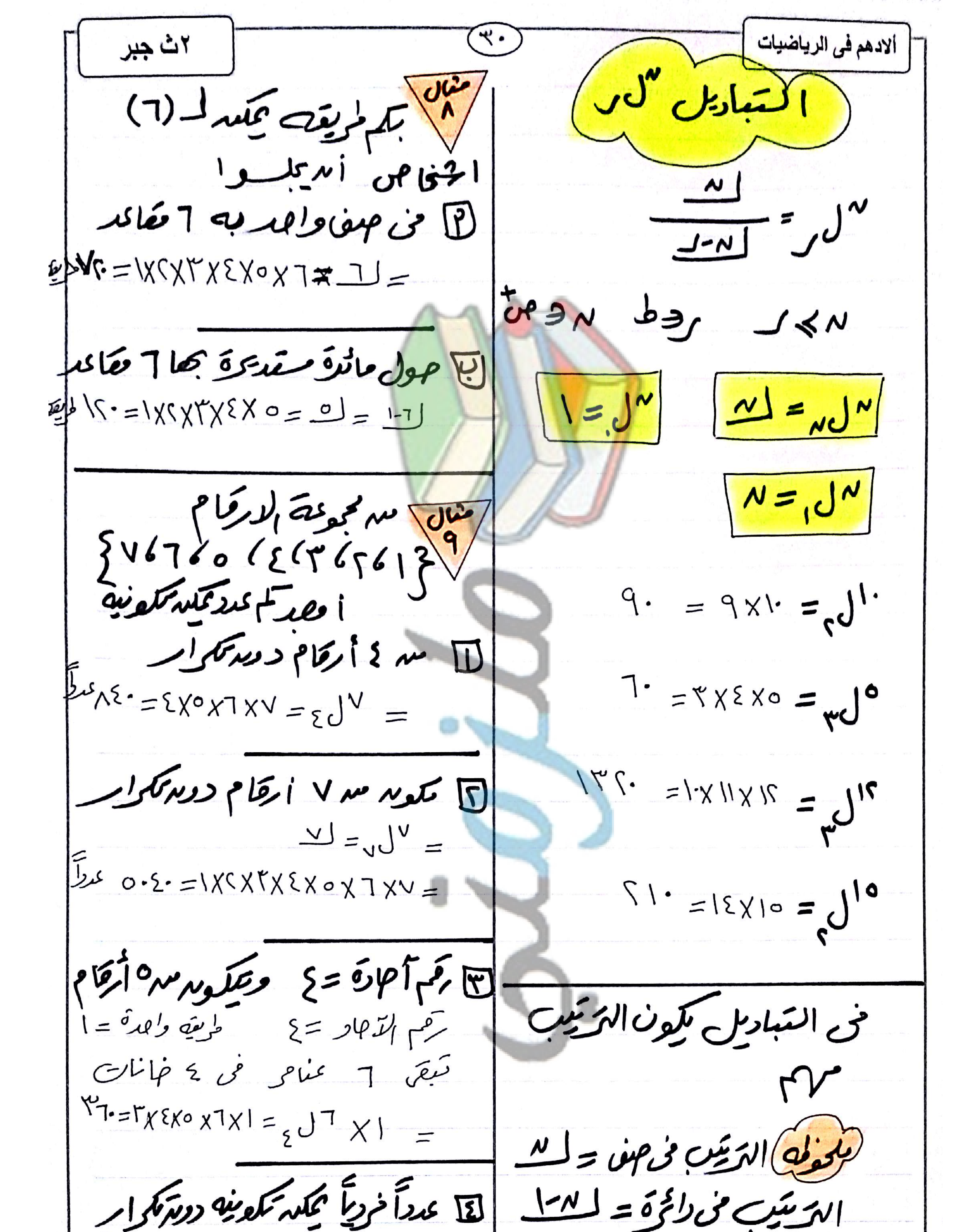
$(ن+٢)(ن+١) + ٢(ن+٢) = ٥٦$

$ن^٢ + ٣ن + ٢ + ٢ن + ٤ - ٥٦ = ٠$

$ن^٢ + ٥ن - ٥٠ = ٠$

$(ن-٥)\ (ن+١٠) = ٠$

$ن = ٥$ ، $ن = -١٠$ مرفوض



التباديل $^{ن}ل_{ر}$

$$^{ن}ل_{ر} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-ر}}$$

ن ≥ ر حيث ن ∈ ص$^{+}$

$^{ن}ل_{ن} = \underline{|ن}$

$^{ن}ل_{٠} = ١$

$^{ن}ل_{١} = ن$

$^{١٠}ل_{٢}$ = ١٠×٩ = ٩٠

$^{٥}ل_{٣}$ = ٥×٤×٣ = ٦٠

$^{١٢}ل_{٣}$ = ١٢×١١×١٠ = ١٣٢٠

$^{١٥}ل_{٢}$ = ١٥×١٤ = ٢١٠

فى التباديل يكون الترتيب مهم

ملحوظة الترتيب فى صف = $\underline{|ن}$

الترتيب فى دائرة = $\underline{|ن-١}$

مثال ٨ بكم طريقة يمكن لـ (٦) أشخاص أن يجلسوا

(أ) فى صف واحد به ٦ مقاعد

= $\underline{|٦}$ = ٦×٥×٤×٣×٢×١ = ٧٢٠ طريقة

(ب) حول مائدة مستديرة بها ٦ مقاعد

$\underline{|٦-١}$ = $\underline{|٥}$ = ٥×٤×٣×٢×١ = ١٢٠ طريقة

مثال ٩ من مجموعة الأرقام {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧} أوجد كم عدد يمكن تكوينه

(١) من ٤ أرقام دون تكرار

= $^{٧}ل_{٤}$ = ٧×٦×٥×٤ = ٨٤٠ عدداً

(٢) مكون من ٧ أرقام دون تكرار

= $^{٧}ل_{٧}$ = $\underline{|٧}$

= ٧×٦×٥×٤×٣×٢×١ = ٥٠٤٠ عدداً

(٣) رقم آحاده = ٤ ويتكون من ٥ أرقام

رقم الآحاد = ٤ طريقة واحدة = ١

تبقى ٦ عناصر فى ٤ خانات

= ١ × $^{٦}ل_{٤}$ = ١×٦×٥×٤×٣ = ٣٦٠

(٤) عدداً فردياً يمكن تكوينه دون تكرار

عدد طرق الآحاد = ٤ {١، ٣، ٥، ٧}

العدد كله = ٤ × $^{٦}ل_{٦}$ = ٤×٦×٥×٤×٣×٢×١ = ٢٨٨٠ عدداً

مثال ١٠

إذا كان $^{٨}ل_{ر} = ٦٧٢٠$

فأوجد $\underline{|ر+١}$

الحل

٨	٦٧٢٠
٧	٨٤٠
٦	١٢٠
٥	٢٠
٤	٤
	١

٥ أعداد أكبرهم ٨

$^{٨}ل_{٥}$

∴ ر = ٥

$\underline{|ر+١} = \underline{|٦} = ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١$

$= ٧٢٠$

مثال ١١

إذا كان $^{ن}ل_{٤} = ١٤ \; ^{ن-٢}ل_{٣}$

فأوجد قيمة ن

الحل

نفك تبديلة الايمن إلى ٤ عوامل متتالية والايسر إلى ٣ عوامل متتالية

∴ ن (ن-١) (ن-٢) (ن-٣) = ١٤ (ن-٢) (ن-٣) (ن-٤)

ن (ن-١) = ١٤ (ن-٤)

ن² - ن = ١٤ن - ٥٦

ن² - ن - ١٤ن + ٥٦ = ٠

ن² - ١٥ن + ٥٦ = ٠

(ن - ٧)(ن - ٨) = ٠

إما ن = ٧ أو ن = ٨

مثال ١٢

إذا كان $^{م+ن}ل_{٣} = ٢١٠$ ، $^{م-ن}ل_{٢} = ٦$

فأوجد قيمتي م ، ن

الحل

$^{م+ن}ل_{٣} = ٢١٠$ ⟸ هنفكه إلى ٣ أعداد مضروبين في بعض

$٢١٠ = ٧ \times ٦ \times ٥ = {}^{٧}ل_{٣}$

∴ م + ن = ٧ ⟵ (١)

$^{م-ن}ل_{٢} = ٦ = {}^{٣}ل_{٢}$

م - ن = ٣ ⟵ (٢)

م + ن = ٧ ⟵ (١) بالجمع

٢م = ١٠ ∴ **م = ٥**

بالتعويض في (١) ن = ٧ - ٥ = ٢

ن = ٢

آخر درس يا جماعة

التوافيق

$^{ن}\text{ق}_{ر} = \frac{^{ن}\text{ل}_{ر}}{ر!}$ ، $٠ \le ر \le ن$

نتائج

(١) $^{ن}\text{ق}_{ر} = \frac{ن!}{ر!\,(ن-ر)!}$

(٢) $^{ن}\text{ق}_{ر} = {}^{ن}\text{ق}_{ن-ر}$

(٣) إذا كان $^{ن}\text{ق}_{ر} = {}^{ن}\text{ق}_{هـ}$

فإما ① $ر = هـ$

② $ر + هـ = ن$

(٤) $^{ن}\text{ق}_{٠} = ١$

(٥) $^{ن}\text{ق}_{ن} = ١$

(٦) $^{ن}\text{ق}_{١} = ن$




أوجد قيمة كلاً من

(١) $^{٨}\text{ق}_{٥} = \frac{^{٨}\text{ل}_{٥}}{٥!}$

$= \frac{٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥} = ٥٦$

(٢) $^{٨}\text{ق}_{٣} = \frac{^{٨}\text{ل}_{٣}}{٣!}$

$= \frac{٨ \times ٧ \times ٦}{١ \times ٢ \times ٣} = ٥٦$

ملاحظة هامة

$^{ن}\text{ق}_{ر} = {}^{ن}\text{ق}_{ن-ر}$

(٣) $^{١٢}\text{ق}_{٩} = {}^{١٢}\text{ق}_{٣}$

$= \frac{١٢ \times ١١ \times ١٠}{١ \times ٢ \times ٣} = ٢٢٠$

(٤) $^{١٠٠}\text{ق}_{٩٨} = {}^{١٠٠}\text{ق}_{٢}$

$= \frac{١٠٠ \times ٩٩}{١ \times ٢} = ٤٩٥٠$

(٥) $^{١٥}\text{ق}_{١٤} = {}^{١٥}\text{ق}_{١}$

$= \frac{١٥}{١} = ١٥$

مثال ٢

إذا كان $^{28}ق_{ر} = {}^{28}ق_{٢ر-٥}$

فأوجد قيمة ر

الحل

∵ $^{28}ق_{ر} = {}^{28}ق_{٢ر-٥}$

إما ر = ٢ر - ٥

ر - ٢ر = -٥

-ر = -٥

∴ ر = ٥

أو ر + ٢ر - ٥ = ٢٨

٣ر = ٢٨ + ٥

٣ر = ٣٣

ر = ١١

مثال ٣

اشترك ٧ أشخاص فى مسابقة شطرنج بحيث تجرى مباراة واحدة بين كل شخصين أوجد عدد مباريات المسابقة

الحل

$^{7}ق_{2} = \frac{٧ \times ٦}{١ \times ٢} = ٢١$ طريقة

مثال ٤

فصل دراسى به ١٠ طلاب و ٨ طالبات بكم طريقة يمكن تشكيل عصابة خماسية من ثلاثة طلاب وطالبتين

الحل

عدد طرق اختيار ٣ طلاب من ١٠

$= {}^{10}ق_{3} = \frac{١٠ \times ٩ \times ٨}{١ \times ٢ \times ٣} = ١٢٠$

عدد طرق اختيار طالبتين من ٨ طالبات

$= {}^{8}ق_{2} = \frac{٨ \times ٧}{١ \times ٢} = ٢٨$

∴ عدد طرق تشكيل العصابة $= {}^{10}ق_{3} \times {}^{8}ق_{2}$

$= ١٢٠ \times ٢٨ = ٣٣٦٠$ طريقة

مثال ٥

بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة

(١) مكونة من ٤ رجال و ٣ سيدات من بين ٦ رجال و ٥ سيدات

الحل

$= {}^{6}ق_{4} \times {}^{5}ق_{3}$

$= \frac{٦ \times ٥}{١ \times ٢} \times \frac{٥ \times ٤}{١ \times ٢}$

$= ١٥ \times ١٠ = ١٥٠$ طريقة

(٢) مكونة من ٤ رجال أو ٣ سيدات من بين ٦ رجال و ٥ سيدات

الحل

$= {}^{6}ق_{4} + {}^{5}ق_{3}$

$= {}^{6}ق_{2} + {}^{5}ق_{2}$

$= ١٥ + ١٠ = ٢٥$ طريقة

لاحظ

و ← ×

أو ← +

ملاحظة هامة

مثال ٦

إذا كان $^{ن}ق_{ن-٢} = ٤٥$ فما قيمة ن

الحل

مش احنا قولنا أن $^{ن}ق_{ن-٢} = {}^{ن}ق_{٢}$

$\therefore {}^{ن}ق_{٢} = ٤٥$

$\frac{^{ن}ل_{٢}}{ل٢} = ٤٥$ ، $ل٢ = ٢ \times ١ = ٢$

$^{ن}ل_{٢} = ٢ \times ٤٥$

$^{ن}ل_{٢} = ٩٠$

$^{ن}ل_{٢} = ١٠ \times ٩$ $\therefore ن = ١٠$

مثال ٧

إذا كان $^{ن}ل_{ر} = ٧٢٠$ ، $^{ن}ق_{ر} = ١٢٠$

أوجد قيمة ن ، ر ثم أوجد

$^{ن-٢}ق_{٢ر}$ ، $^{ن-٢}ق_{٤ر}$

الحل

$\therefore {}^{ن}ق_{ر} = \frac{^{ن}ل_{ر}}{لر}$

$\frac{٧٢٠}{لر} = ١٢٠$

$١٢٠ \, لر = ٧٢٠$

$لر = \frac{٧٢٠}{١٢٠} = ٦ = ٣ \times ٢ \times ١$

$\therefore$ $ر = ٣$

$\therefore {}^{ن}ل_{٣} = ٧٢٠$ ثلاثة أعداد حاصل ضربهم ٧٢٠

$= ١٠ \times ٩ \times ٨$

$\therefore$ $ن = ١٠$

① $^{ن-٢}ق_{٢ر} = {}^{٨}ق_{٦} = {}^{٨}ق_{٢}$

$= \frac{٧ \times ٨}{١ \times ٢} = ٢٨$

② $^{ن-٢}ق_{٤ر} = {}^{٨}ق_{١٢}$ غير معرف

مرفوض ⟸ لأن $ن < ر$

تم بحمد الله وتوفيقه الانتهاء من منهج الجبر

أ/ محمد أدهم

السبت الموافق ٢٠١٧/١/٢٧م